



Mécanique des fluides (2). Ecoulements parfaits

Dans tous les exercices de cette feuille, les écoulements sont parfaits.

Ex1 Jet d'eau de Genève

Le débit massique à la base du jet d'eau de Genève est $D_m = 500 \text{ kg.s}^{-1}$. Le diamètre de la section du tuyau à la base est $d = 11 \text{ cm}$. Trouver l'ordre de grandeur de la hauteur du jet et la puissance mécanique nécessaire pour l'alimenter.

Ex2 Tornado

Une tornade est décrite par un écoulement parfait stationnaire, incompressible et homogène de masse volumique μ , dont le champ des vitesses en coordonnées cylindriques, est:

$$\overrightarrow{V(M)} = V(r) \overrightarrow{u_\theta}$$

tel que le vecteur tourbillon associé est

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega} &= \Omega_0 \overrightarrow{u_z} \text{ pour } 0 \leq r \leq a \\ \overrightarrow{\Omega} &= \overrightarrow{0} \text{ pour } r \geq a \end{aligned}$$

Déterminer le champ des vitesses et l'expression de la pression $p(r)$ sachant que $p(r) \rightarrow P^\circ$ quand $r \rightarrow \infty$.

Les dégâts observés à Haumont (Nord) le 3 Août 2008 ont été attribués par certains météorologues à une tornade de type F2 avec vent maximal de 180 km/h et diamètre de l'ordre du km. Déterminer dans le cadre du modèle précédent le vecteur tourbillon et la pression au centre de la tornade.

Ex3 Energie hydraulique

On étudie un barrage hydraulique dont la retenue d'eau est suffisamment vaste pour qu'on puisse considérer que l'eau y est immobile. La surface libre de la retenue est en $z = H$. Une conduite de diamètre constant D part de la retenue à l'altitude h et l'eau ressort de la conduite en A à l'altitude 0 à l'air libre. On considère que l'eau est un fluide incompressible de masse volumique μ et que l'écoulement est stationnaire et irrotationnel. On néglige tout frottement.

1. Exprimer la pression à l'intérieur de la conduite $P_1(z)$ sous la forme $P_1(z) = P^\circ (1 - \frac{z}{z_0})$

$D = 60 \text{ cm}$, $H = 300 \text{ m}$, $P_{\text{sat}} = 3.10^3 \text{ Pa}$ pour l'eau à température ambiante. Montrer qu'au delà d'une certaine altitude, ce modèle de pression n'est plus valide.

2. La cavitation engendre des perturbations (usure des matériaux, bruits). Pour y remédier, on relie l'extrémité aval de la conduite A à une tubulure de section décroissante (injecteur) et de diamètre de sortie $d < D$.

Exprimer la vitesse en sortie de l'injecteur et montrer que la vitesse en A est $V = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gH}$.

Montrer que le phénomène de cavitation disparaît dans toute la conduite si d est inférieur à une certaine valeur d_0 . On considère ici $h \simeq H$.

Ex4 Cavitation

Sous l'effet d'une baisse de pression, des bulles de gaz peuvent se former dans l'eau (au voisinage des hélices d'un bateau par exemple). On étudie une modélisation sommaire de l'implosion d'une bulle: on considère que la pression dans la bulle est nulle et que son centre O est fixe dans le référentiel galiléen d'étude. Son rayon est $a(t)$ et le champ des vitesses dans le fluide entourant la bulle est radial: $\vec{V}(M, t) = V(r, t)\vec{u}_r$. Loin de la bulle, la pression est P° la vitesse du fluide est nulle. L'écoulement est parfait, homogène incompressible. La masse volumique de liquide est μ .

1. Déterminer $V(r, t)$ en fonction de a et $\dot{a}$. Montrer que l'écoulement est irrotationnel.
2. Calculer l'énergie cinétique totale du fluide. Calculer la puissance des forces de pression reçue par le fluide contenu dans une sphère de centre O et de rayon r en fonction de $P(r, t)$ et $a(t)$.
3. En déduire l'expression de $\dot{a}(t)$ en fonction de $a(t)$. A $t = 0$, $a(0) = a_0$ et $\dot{a}(0) = 0$.
4. Calculer le temps que la bulle met à disparaître.

On donne $\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}} dx = 0,75$, $a_0 = 1mm$, $P = 1bar$

Ex5 Voile de Flettner

On étudie l'écoulement incompressible, irrotationnel et permanent d'un fluide parfait autour d'un cylindre de rayon R , de hauteur h , d'axe vertical.

1. Le cylindre est fixe. La vitesse du fluide loin du cylindre est $\vec{V} = V_0 \vec{u}_x$. Quelle est l'équation vérifiée par le potentiel des vitesses? Le potentiel défini en coordonnées cylindriques par $\phi = V_0 r \cos(\theta) (1 + \frac{R^2}{r^2})$ permet de vérifier les conditions aux limites (cf cours). A grande distance du cylindre, la pression est constante, égale à P° . Déterminer la pression en tout point à la surface du cylindre à une constante près. En déduire la résultante des forces exercées sur le cylindre.

2. Le cylindre tourne à vitesse angulaire constante ω autour de son axe. Pour tenir compte de l'entraînement du fluide par le cylindre en rotation, le potentiel des vitesses devient: $\phi = V_0 r \cos(\theta) (1 + \frac{R^2}{r^2}) + a^2 \omega \theta$. En déduire la résultante des forces exercées sur le cylindre.

Flettner en 1927 a mis au point un bateau équipé d'un tel cylindre. Dans quelle direction se fait la propulsion par rapport au vent?

$V_0 = 10m/s$, $\mu = 1,3kg/m^{-3}$, $h = 10m$, $a = 0,3m$, $\omega = 30rds/s$. Calculer F .

3. Applications: Cas d'une balle de ping-pong: montrer que le fait de lifter ou de couper une balle influe sur la portée de la balle. Corner.

Remarque : l'entraînement de l'air par le cylindre en rotation est due à la viscosité, négligée ici...

Ex6 Régimes fluvial et torrentiel

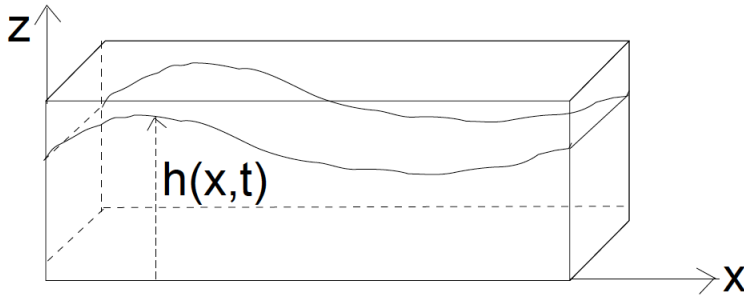
On considère un canal d'axe Ox, à fond plat horizontal de cote $z=0$, de largeur $L(x)$ dans lequel s'écoule de l'eau considérée comme incompressible. La surface libre est repérée par sa cote $h(x)$. Le champ des vitesses est *approximativement (commenter!)* de la forme $\vec{V} = V(x)\vec{u}_x$. Montrer, en utilisant la conservation du débit massique et la relation de Bernoulli, que

$$\left(\frac{V^2}{gh} - 1\right) \frac{dV}{V} = \frac{dL}{L}.$$

Comment doit varier $L(x)$ pour que la vitesse augmente quand x augmente? $F = \sqrt{\frac{V}{gh}}$ est le nombre de Froude de l'écoulement.

Ex7 Onde dans un canal

On s'intéresse à la propagation d'ondes unidimensionnelles dans un canal à fond horizontal plat, de longueur infinie et de largeur l constante. Le plan $z=0$ correspond au fond du canal. Le canal contient de l'eau décrite comme un fluide parfait incompressible de masse volumique μ . On ne s'intéresse qu'aux phénomènes indépendants de y .



Soient $v(x, z, t)$ et $P(x, z, t)$ la vitesse et la pression en un point donné, $h(x, t)$ la hauteur d'eau à l'abscisse x . On suppose l'écoulement irrotationnel et on néglige en tout point la composante verticale de la vitesse devant la composante horizontale: $\vec{v}(x, z, t) \simeq v_x(x, z, t)\vec{e}_x$

1. Montrer que $\vec{v}$ ne dépend pas de z .

2. On considère une tranche de fluide comprise entre les abscisses x et $x + dx$. En faisant un bilan de matière, montrer que

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv_x)}{\partial x} = 0$$

3. Ecrire l'équation d'Euler pour le fluide. Montrer que $\frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g$. En déduire l'expression de la pression $P(x, z, t)$ en fonction de la pression atmosphérique P_0 et h .

4. Montrer que

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}$$

5. On étudie les ondes de faible amplitude à la surface, en l'absence d'écoulement permanent. On pose $h(x, t) = h_0 + \delta(x, t)$ avec $|\delta| \ll h_0$.

a. Ecrire le système de deux équations vérifiées par v_x et δ en ne gardant que les termes du premier ordre par rapport à ces deux quantités et à leurs dérivées.

b. Montrer que v_x et δ satisfont chacun à une équation de d'Alembert. Donner la solution générale pour δ . Quelle est la vitesse de propagation? Donner sa valeur pour un canal de 2 mètres de profondeur.

Dans le cas d'une onde progressive dans le sens des x croissants, donner l'expression de v_x en fonction de δ .

Ex8 Barrage hydraulique

Un barrage hydraulique est constitué d'une galerie de longueur $L=10\text{km}$ et de section $s=10\text{m}^2$ reliée à un lac suffisamment grand pour qu'on puisse négliger les variations de niveau et à une cheminée verticale cylindrique de section $S=100\text{m}^2$. Une vanne en aval de la cheminée alimente les turbines de la centrale électrique. On considère l'écoulement parfait, homogène et incompressible. La galerie débite 30m^3 par seconde.

La surface du lac est à une altitude z_l et celle de l'eau dans la cheminée est à z_c

1. La vanne est ouverte et l'écoulement est stationnaire. Représenter schématiquement l'allure d'une ligne de courant. Déterminer la dénivellation $h=z_c-z_l$.

2. On ferme la vanne à $t=0$ et on s'intéresse au mouvement du fluide une fois la vanne fermée. Représenter schématiquement l'allure d'une ligne de courant.

L'écoulement n'est plus stationnaire. En intégrant l'équation d'Euler sur une ligne de courant, établir, en utilisant les données de l'énoncé, l'équation différentielle:

$$\frac{S}{s} \frac{d^2 h}{dt^2} L + \frac{1}{2} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 + gh = 0$$

On considère qu'avec $S \gg s$ et $L \gg h$, on peut négliger le second terme de l'équation devant le premier. Déterminer $h(t)$ en utilisant les conditions initiales.

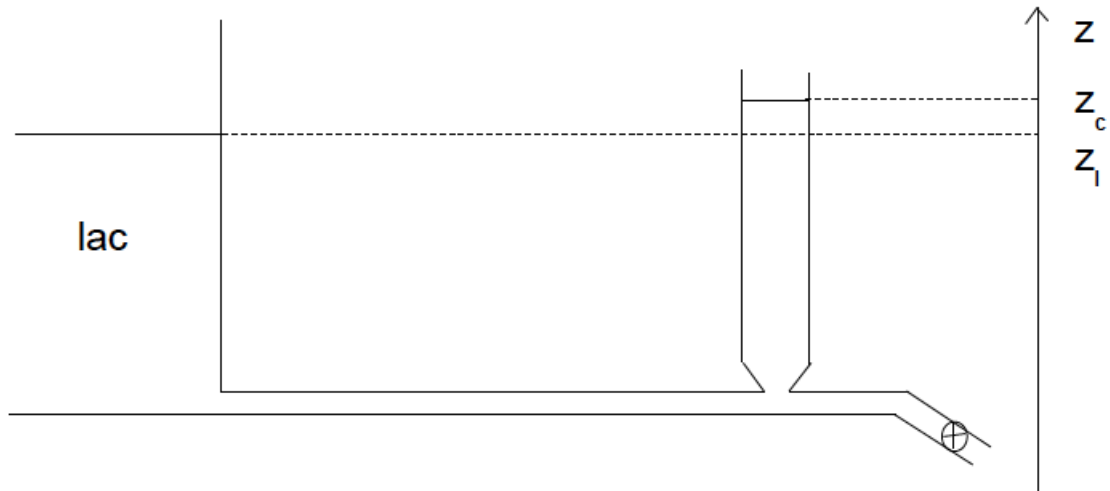
3a. La cheminée a une hauteur $h_1=20\text{m}$ au-dessus du niveau du lac. Déterminer le temps t_1 entre la fermeture de la vanne et le déversement.

b. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse V de l'eau dans la galerie quand l'eau déborde de la cheminée. La résoudre.

c. Déterminer la durée du déversement t_2-t_1 ainsi que la vitesse V_1 de l'eau dans la galerie à l'instant où la hauteur atteint 20m .

d. En déduire le volume déversé en fonction de s , g , L , h_1 et V_1 .

4. Comment évolue $h(t)$ une fois le déversement terminé? Que se passerait-il s'il n'y avait pas la cheminée?



Ex8 Oscillations d'une bulle

On considère une bulle sphérique de gaz dans un fluide de masse volumique constante ρ_0 . A l'équilibre, les pressions dans le fluide et dans la bulle sont supposés identiques et uniformes (valeur P°), le rayon de la bulle étant R_0 . On veut étudier les oscillations autour de cet état d'équilibre et on note $R(t) = R_0 + \varepsilon(t)$, avec les approximations suivantes:

- le gaz subit une transformation isentropique (on introduira $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$)
- on néglige les effets de la pesanteur et les effets de capillarité
- le liquide est un fluide parfait homogène incompressible et $\varepsilon \ll 1$

1. Exprimer $\vec{v}(r, t)$ en fonction de $R, \dot{R}, r, \vec{u}_r$.

2. Relier la pression dans la bulle $P(t) = P^\circ + p(t)$ à $\varepsilon(t)$.

3. Déterminer, en fonction de $P^\circ, \rho_0, \gamma, R_0$ la pulsation ω_0 des petites oscillations

2. On considère l'écoulement parfait (et donc isentropique) et stationnaire d'un gaz parfait de coefficient γ dans une conduite horizontale de section $S(x)$. On note $p(x)$ le champ de pression et le champ des vitesses est approximativement $\vec{V} = V(x)\vec{u}_x$.

Etablir trois relations reliant $p(x), V(x), S(x)$.

En déduire:

$$(M^2 - 1) \frac{dV}{V} = \frac{dS}{S}$$

où le nombre de Mach $M = \frac{V}{c}$. La vitesse $c(x) = \sqrt{\frac{\gamma p(x)}{\rho(x)}}$ est la célérité du son dans le fluide. Comment doit varier $S(x)$ pour que la vitesse augmente quand x augmente?

Ex4 Clepsydre

Un récipient cylindrique de section S , contenant un fluide incompressible, se vide par un tube horizontal de longueur L et de section $s \ll S$ situé à sa base. On suppose l'écoulement unidimensionnel à la surface libre du liquide avec $\vec{V}_A = -V(t)\vec{u}_z$. De même on suppose l'écoulement unidimensionnel à la sortie $\vec{V}_B = v(t)\vec{u}_x$. Soit $h(t)$ la hauteur de liquide dans le récipient.

1. En supposant la validité du théorème de Bernoulli bien que l'écoulement ne soit pas stationnaire, déterminer la vitesse $v(t)$. En déduire le temps de vidange T du récipient pour une hauteur initiale h_0 .
2. On s'intéresse au régime transitoire initial au cours duquel le fluide atteint la vitesse $v(t)$ atteint sa valeur $\sqrt{2gh_0}$ en régime quasi-stationnaire, sans que le niveau du fluide ait eu le temps de varier notablement. En négligeant l'accélération locale dans le réservoir, mais pas dans le tube, montrer que $2L \frac{dv}{dt} = gh_0 - v^2$. Chercher une solution sous la forme $v(t) = v_\infty th(t/\tau)$ et exprimer les paramètres en fonction g, h_0, L . Comparer τ et T . Commenter.

Ex8 Oscillations d'une bulle

On considère une bulle sphérique de gaz dans un fluide de masse volumique constante ρ_0 . A l'équilibre, les pressions dans le fluide et dans la bulle sont supposés identiques et uniformes (valeur P°), le rayon de la bulle étant R_0 . On veut étudier les oscillations autour de cet état d'équilibre et on note $R(t) = R_0 + \varepsilon(t)$, avec les approximations suivantes:

- le gaz subit une transformation isentropique (on introduira $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$)
- on néglige les effets de la pesanteur et les effets de capillarité
- le liquide est un fluide parfait homogène incompressible et $\varepsilon \ll 1$

1. Exprimer $\vec{v}(r, t)$ en fonction de $R, \dot{R}, r, \vec{u}_r$.
2. Relier la pression dans la bulle $P(t) = P^\circ + p(t)$ à $\varepsilon(t)$.
3. Déterminer, en fonction de $P^\circ, \rho_0, \gamma, R_0$ la pulsation ω_0 des petites oscillations

On considère un bassin parallélépipédique de côtés horizontaux de longueur a et b , rempli d'eau sur une hauteur moyenne h . L'eau est un fluide parfait incompressible, de masse volumique μ . Une onde se propage dans le bassin, l'amplitude de la vibration étant très petite devant h . La vitesse des particules d'eau se met sous la forme $\vec{V} = \text{grad}(\phi)$ avec $\phi(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)e^{i\omega t}$. Un point de la surface du fluide, situé en (x, y, h) au repos est en $(x, y, h + \xi(x, y, t))$ quand le fluide est en mouvement.

1. Quelle est l'équation vérifiée par ϕ ? En déduire la forme des fonctions $X(x)$ et $Y(y)$ (on introduira deux entiers n_x et n_y) puis celle de $Z(z)$.
2. Montrer que l'ordre de grandeur de l'accélération convective est négligeable devant celle de l'accélération locale. Puis montrer qu'à la surface du fluide : $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P_{atm}}{\mu} + g\xi(x, y, t) = C(t)$ où $C(t)$ est une fonction du temps seul. Montrer qu'on peut choisir $C(t)$ sans modifier le champ des vitesses.
3. Trouver la relation de dispersion et en déduire la plus petite pulsation pouvant se propager dans le bassin ($a < b$)

Ex5 Oscillations dans un tube en U

Un tube en U (section S identique sur les différentes parties du tube) est rempli d'un volume SL d'eau. L'écoulement est parfait, le fluide incompressible et homogène. La dénivellation entre les deux branches du tube

$$h(t) = z_A - z_B$$

.On considère que la vitesse $\overrightarrow{v(M,t)} = v(M,t)\overrightarrow{T}$ est telle que $v(M,t)$ est uniforme dans une section du tube. Montrer que la vitesse a même valeur algébrique en tout point du fluide et exprimer $v(M,t)$ en fonction de $h(t)$.

En assimilant l'eau à un fluide parfait, calculer la période T des oscillations du liquide dans le tube.