## Mécanique des fluides (3).Ecoulements parfaits

**Ex1** Bilan de masse (extrait Centrale PC 2009)

Un cylindre horizontal d'axe Ox, de longueur L et de rayon a, est soumis à une pluie verticale. Pour simplifier, on ne prend pas en compte le fait que la pluie tombe en gouttes et on la modélise par un vecteur densité de flux de masse $\overrightarrow{j_m}=\psi_m\overrightarrow{e_z}$ uniforme et stationnaire .On repère un point de la surface du cylindre par son angle polaire $\alpha$ par rapport à la verticale ascendante. On se place en régime stationnaire et on note $D_m(\alpha)$ le débit massique de l'eau qui s'écoule à la surface du cylindre. Les gouttes de pluie ne rebondissent pas sur le cylindre et l'eau ne peut quitter le cylindre qu'en $\alpha = \pi$ . On suppose l'eau incompressible. On envisage le système ouvert et fixe constitué à chaque instant de l'eau s'écoulant sur le cylindre et comprise entre $\alpha$ et $\alpha + d\alpha$ .

1) On suppose tout d'abord que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

a) Établir l'équation différentielle : $\frac{dD_m}{d\alpha} = La\psi_m \cos(\alpha)$

b) Justifier sommairement que $D_m = 0$ pour $\alpha = 0$ . En déduire l'expression de $D_m$ en fonction de $\alpha$, L, a et $\psi_m$ et tracer l'allure du graphe de $D_m$ en fonction de $\alpha$ pour $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

2) On suppose désormais que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . En quoi la situation est-elle différente de celle qui prévalait en 1 ? Compléter sans nouveaux calculs le graphe de 1.b.

3) Justifier par ailleurs par un raisonnement global que $D_m(\alpha = \pi) = La\psi_m$ et vérifier la cohérence avec la question précédente.

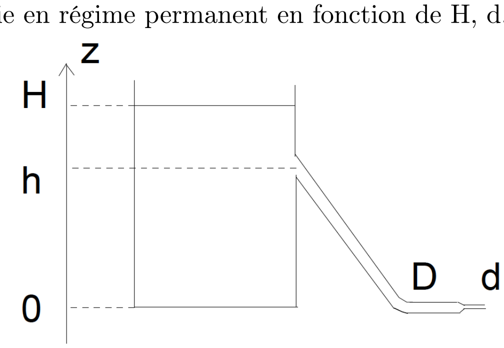
**Ex2** Chariot en mouvement

1. Un chariot, de masse m, est mobile sans frottement sur des rails horizontaux. A t=0, sa vitesse est $\overrightarrow{V} = V_0\overrightarrow{u_x}$. Pour t>0, il pleut et la pluie tombe verticalement dans le chariot avec un débit massique constant $D_m$. Déterminer la vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du chariot.

2. Il ne pleut plus. A t=0, sa vitesse est $\overrightarrow{V} = V_1\overrightarrow{u_x}$. Pour t>0, le chariot est soumis à une force de traction constante $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{u_x}$ mais il perd une partie du sable qu'il contient avec un débit massique $D\prime_m$, le sable qui s'échappe ayant une vitesse relative $\overrightarrow{u} = -u\overrightarrow{u_x}$ par rapport au chariot. Déterminer sa vitesse en fonction du temps.

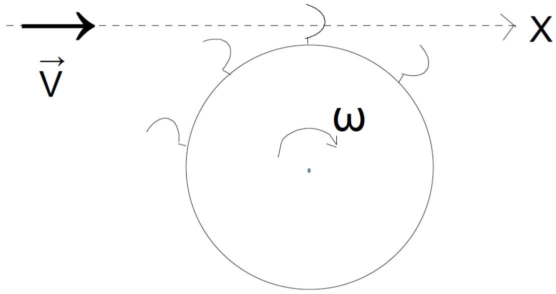
**Ex3** Roue à augets (TPE 2010)

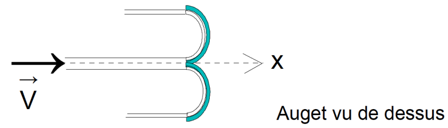
1. Dans le dispositif ci-dessus avec une surface libre dans le réservoir très grande devant la section S de la conduite à la sortie, calculer la vitesse V de l'eau (fluide parfait, incompressible, masse volumique$\rho$) à la sortie en régime permanent en fonction de H, d, g.




2. On place en sortie une turbine constituée d'une roue de rayon R à la périphérie de laquelle se trouvent fixés des augets. La roue est suffisamment grande pour qu'on puisse considérer qu'au moment où l'eau arrive

sur les augets, ils sont en translation rectiligne à la vitesse $\overrightarrow{u} = u\overrightarrow{e_x} = a\omega\overrightarrow{e_x}$. Le jet d'eau incident a une section s et se divise en deux jets de section s/2.



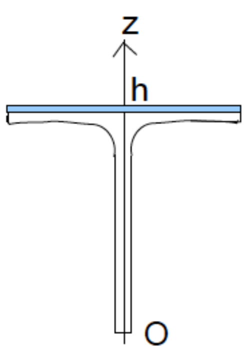




Dans quel référentiel l'écoulement de l'eau est-il permanent? Quel est dans ce référentiel le débit volumique de l'eau? Déterminer l'expression de la force exercée par l'eau sur l'auget ainsi que le moment exercé sur la roue et la puissance fournie à la roue.

**Ex4** Lévitation d'une plaque

Une plaque circulaire horizontale de rayon$R$, de masse m, est en équilibre sous l'action de son poids et sous l'action d'un jet d'eau d'axe vertical Oz. Le disque se trouve à une altitude h au-dessus de la section de sortie du jet d'eau de section initiale $s < \pi R^2$. On considère que l'écoulement est stationnaire, incompressible, homogène de masse volumique $\mu$. La vitesse du jet en z=0 est $\overrightarrow{V_0}$. Au-dessous de la périphérie du disque, l'écoulement est radial, d'épaisseur e<<h et $\overrightarrow{V} = V\overrightarrow{u_r}$. On note $m_e$ la masse d'eau entre $z = 0$ et $z = h$, située sous le disque.

1. Montrer que $2\pi ReV = sV_0$ et $(m + m_e)g = \mu sV_0^2$.
2. Déterminer $V$en fonction de $V_0$, $g$ et $h$. En déduire $m_e$en assimilant le volume d'eau à deux cylindres.
3. Calculer $h$ et $e$ pour $m = 200g$,R=10cm,s=10cm$^2$, $V_0 = 2m.s^{-1}$.




**Ex**5 Mascaret

Un mascaret est une onde solitaire qui remonte dans l'estuaire de certains fleuves au moment de la marée montante (observable en France dans l'estuaire de la Gironde, possibilité pour les surfers de se faire porter par le mascaret sur plusieurs km. Au Brésil, vague "pororoca" dans l'estuaire de l'Araguari). En voici une modélisation sommaire.

On considère qu'un fleuve, de largeur constante L, s'écoule vers la mer selon la direction (Ox) de l'amont vers l'aval avec une vitesse constante $v_1$ et une hauteur constante $h_1$ en amont du mascaret. Le mascaret a un profil rectangulaire et remonte selon l'axe (Ox) à la vitesse constante v. La vitesse du fleuve et la hauteur d'eau assez loin en aval du mascaret sont $v_2$ et $h_2$. L'eau est un fluide parfait incompressible de masse volumique $\mu$. On veut déterminer v et $v_2$ en fonction de $v_1$, $h_1$ et $h_2$.

1. En effectuant un bilan de masse, en déduire une relation entre v et $v_2$, $v_1$, $h_1$ et $h_2$.
2. En effectuant un bilan de quantité de mouvement dans le référentiel qui se déplace avec le front du mascaret, établir une nouvelle relation.

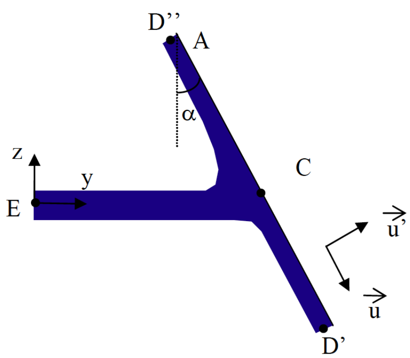
3. Exprimer v en fonction de $v_1$, $h_1$ et $h_2$. La vitesse du mascaret est-elle plus rapide au moment des basses eaux ou au moment des crues des fleuves?

4. Exprimer $v_2$ en fonction de $v_1$, $h_1$ et $h_2$. Interpréter le changement de signe de signe de $v_2$ quand $h_2$ augmente.

5. En utilisant les résultats obtenus sur les ondes en eaux peu profondes, justifier la forme "rectangulaire" du front du mascaret et son éventuel déferlement par un raidissement progressif du front.

**Ex6** Action d'un jet d'eau sur une plaque mobile autour d'un axe

On considère un jet d'eau à section rectangulaire de côtés a et e<<a, frappant sur toute sa largeur une plaque carrée de masse m, de côté a, au voisinage de son centre C. La plaque est mobile sans frottements autour d'un axe horizontal Ax. Sous l'effet du jet d'eau, elle prend à l'équilibre une inclinaison $\alpha$ par rapport à la verticale.




L'écoulement est parfait, incompressible, stationnaire et homogène de masse volumique $\mu$.On néglige l'action des forces de pesanteur dans l'écoulement. Dans la section centrée en E, l'écoulement est unidimensionnel avec une vitesse $\overrightarrow{V} = V\overrightarrow{u_y}$ et un champ de pression $P_0$. Après avoir frappé la plaque, l'écoulement se partage en deux: au voisinage de D', l'écoulement de section ae' est unidimensionnel avec $\overrightarrow{V'} = V'\overrightarrow{u}$ et un champ de pression $P_0$; au voisinage de D", l'écoulement de section ae" est unidimensionnel avec $\overrightarrow{V}" = -V"\overrightarrow{u}$ et un champ de pression $P_0$

Montrer que $V' = V" = V$

Etablir une relation entre $e, e', e"$.

Déterminer l'angle $\alpha$ en fonction de m, g, e, $\alpha, V$ et $\mu$. Commenter l'influence des différents paramètres.

Etablir l'expression de la résultante F des forces de pression exercées par l'eau du jet et l'air sur la plaque en fonction de $\mu, a, e, e', e", V$ et $\alpha$. Justifier également que $\overrightarrow{F}.\overrightarrow{u} = 0$. En déduire une relation entre $e, e', e"$ et $\alpha$, puis les expressions de $e'$ et $e"$ en fonction de $e$ et $\alpha$.

**Ex**7 Fonctionnement d'une lance à incendie

Dans le dispositif décrit ci-dessous, la puissance maximale de la motopompe solidaire du véhicule de secours est 1,7kW.

On s'intéresse maintenant au fonctionnement de la lance à incendie branchée sur la motopompe. La lance a une longueur de 50 m, son diamètre intérieur est $d_1 = 32$ mm et elle se termine par un petit embout conique dont le diamètre minimal intérieur est $d_2 = 14$ mm. On se place en régime permanent, le débit volumique de la motopompe est noté $D_v$ et on néglige toutes les pertes de charges.

❑ **12 —** À partir d'un bilan d'énergie, montrer que la puissance $\mathscr{P}$ que doit fournir la motopompe s'écrit dans le cas général :

$$\mathscr{P} = \rho\, D_v \left[\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g\,(z_s - z_e) + \frac{p_s - p_e}{\rho}\right]$$

où les grandeurs indicées « $s$ » correspondent aux grandeurs de sortie et celles indicées « $e$ » aux grandeurs d'entrée du système choisi.

❑ **13 —** L'embout de la lance est maintenu à 20 m au dessus du plateau du véhicule. Calculer le débit maximal $D_{v\max}$ que pourra assurer la motopompe. En déduire la vitesse maximale de l'eau en sortie de lance.

❑ **14 —** À partir d'un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force $\overrightarrow{F_e}$ exercée par l'eau sur l'embout conique de la lance lorsque cette dernière est horizontale. Calculer la valeur numérique du module de cette force pour le débit $D_{v\max}$ obtenu à la question précédente.

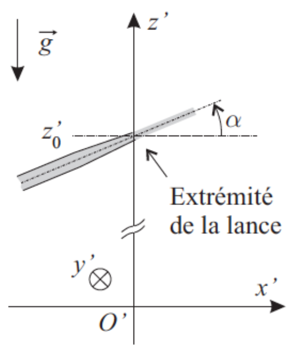



FIG. 3 – Configuration de l'extrémité de la lance.